Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Calcolatori Elettronici I — a.a. 2008–2009

dal compito del 15 settembre 2009

A/ *Progettare la rete logica combinatoria che ha come input i flag di stato* `ZF` *(zero),* `SF` *(sign), e* `OF` *(overflow), e come output le condizioni di test per le istruzioni* `JGE` *("jump if greater or equal") e* `JNG` *("jump if not greater").*

soluzione

Le istruzioni di salto condizionato `JGE` e `JNG` (alias di `JLE`, "jump if less or equal") si basano sul risultato di operazioni tra *interi con segno*, espressi in complemento a due. Ad esempio, l'istruzione 8086 `CMP AH,DL` effettua la sottrazione tra i registri a 8 bit `AH` e `DL` senza alterarne il contenuto (cosa che farebbe invece l'istruzione `SUB AH,DL`, ponendo il risultato della sottrazione in `AH`), e tiene traccia dell'esito dell'operazione modificando, tra gli altri, i flag di stato `ZF`, `SF` ed `OF` contenuti nella "processor status word" `PSW`.

Definiamo $p \doteq \mathtt{AH}$, $q \doteq C_2(\mathtt{DL})$ e $s \doteq [p+q]_8 = \mathtt{AH{-}DL}$, dove s denota la versione in precisione finita (8 bit) della somma (in precisione infinita) $p+q \equiv [p+q]_\infty$. Il flag `ZF` viene posto a 1 se il risultato è nullo, ossia se $s=0$:

$$\mathtt{ZF} = \overline{s_7+s_6+s_5+s_4+s_3+s_2+s_1+s_0} = \overline{s_7}\cdot\overline{s_6}\cdot\overline{s_5}\cdot\overline{s_4}\cdot\overline{s_3}\cdot\overline{s_2}\cdot\overline{s_1}\cdot\overline{s_0} \ .$$

Analogamente, il flag `SF` viene posto a 1 se $s<0$, ossia se il bit più significativo del risultato è 1:

$$\mathtt{SF} = s_7 \ .$$

Infine, il flag `OF` viene posto a 1 se il risultato non è rappresentabile *in complemento a due* su 8 bit:

$$\mathtt{OF} = p_7q_7\overline{s}_7 + \overline{p}_7\overline{q}_7s_7 \ ,$$

segnalando le condizioni di errato funzionamento in cui la somma in precisione finita di due numeri positivi assume valore negativo, o la somma di due numeri negativi assume valore positivo. Notiamo che può verificarsi overflow solo se i numeri p e q hanno lo stesso segno; ne segue che *un'istruzione di tipo* `CMP` *(o* `SUB`*) può dare luogo ad overflow solo se i suoi due operandi hanno segno opposto.*

Dalle relazioni precedenti risulta evidente che $(\mathtt{ZF}=1) \Rightarrow (\mathtt{SF}=0)$, cosicché $\mathtt{ZF} = \mathtt{ZF}\cdot\overline{\mathtt{SF}}$.[1] Non è invece vero che $(\mathtt{ZF}=1) \Rightarrow (\mathtt{OF}=0)$, avendosi semplicemente che $(\mathtt{ZF}=1) \Rightarrow (\mathtt{OF}=p_7q_7)$; dunque se $s=0$ e si verifica overflow, allora p e q devono essere entrambi negativi, ossia $p+q<0$.[2] Quindi $(\mathtt{ZF}=1) \Rightarrow (p+q=0)$ è vera solo in assenza di overflow, mentre se c'è overflow si ha $(\mathtt{ZF}=1) \Rightarrow (p+q<0)$. (È invece ovvio che l'implicazione contraria è sempre vera: $(p+q=0) \Rightarrow (\mathtt{ZF}=1)$.)

[1] $[\alpha\Rightarrow\beta](\alpha,\beta) \doteq \overline{\alpha\cdot\overline{\beta}}$. Segue $([\alpha\Rightarrow\beta]=1) \Leftrightarrow (\alpha\cdot\overline{\beta}=0)$, da cui $\alpha=\alpha\cdot(\beta+\overline{\beta})=\alpha\cdot\beta$. Qui è $\alpha=\mathtt{ZF}$, $\beta=\overline{\mathtt{SF}}$.

[2] Ciò accade in particolare per $p=q=[10000000]$, nel qual caso $\mathtt{ZF}=1$, $\mathtt{SF}=0$, $\mathtt{OF}=1$.

[JGE] Nel caso dell'istruzione JGE, il salto va effettuato se $p + q \geq 0$, situazione che in assenza di overflow ($\mathtt{OF} = 0$) è rappresentata dalla condizione $\mathtt{SF} = 0$ (o $\overline{\mathtt{SF}} = 1$). *Se invece si verifica overflow ($\mathtt{OF} = 1$), allora il segno del risultato calcolato su 8 bit è l'opposto di quello corretto*, ottenibile solo su 9+ bit, ed in particolare la situazione $p + q > 0$ si riflette nella condizione $\mathtt{SF} = 1$, mentre la $p + q = 0$ non può mai verificarsi, per quanto detto sopra. Detta dunque $f_{\mathtt{GE}} = 1$ la condizione di test per l'istruzione JGE, dove $f_{\mathtt{GE}}$ è la funzione booleana dei flag che assume valore 1 se $p + q \geq 0$, si ha

$$f_{\mathtt{GE}}(\mathtt{ZF}, \mathtt{SF}, \mathtt{OF}) = \overline{\mathtt{SF}} \cdot \overline{\mathtt{OF}} + \mathtt{SF} \cdot \mathtt{OF} = \overline{\mathtt{SF} \oplus \mathtt{OF}} \ , \tag{1}$$

di fatto indipendente da ZF. Tenendo conto di quanto detto sopra, si può peraltro esprimere la $f_{\mathtt{GE}}$ in una forma più ridondante come funzione di ZF, nel seguente modo: $f_{\mathtt{GE}} = \mathtt{ZF} \cdot \overline{\mathtt{OF}} + \overline{\mathtt{SF} \oplus \mathtt{OF}}$. Da tale forma si torna a quella più sintetica osservando che $\mathtt{ZF} \cdot \overline{\mathtt{OF}} + \overline{\mathtt{SF}} \cdot \overline{\mathtt{OF}} = (\mathtt{ZF} \cdot \overline{\mathtt{SF}}) \cdot \overline{\mathtt{OF}} + \overline{\mathtt{SF}} \cdot \overline{\mathtt{OF}} = (\mathtt{ZF} + 1) \cdot \overline{\mathtt{SF}} \cdot \overline{\mathtt{OF}} = 1 \cdot \overline{\mathtt{SF}} \cdot \overline{\mathtt{OF}} = \overline{\mathtt{SF}} \cdot \overline{\mathtt{OF}}$.

[JNG (JLE)] Nel caso dell'istruzione JNG≡JLE, il salto va effettuato se $p+q \leq 0$, situazione che in assenza di overflow ($\mathtt{OF} = 0$) è rappresentata dalla condizione $\mathtt{ZF} + \mathtt{SF} = 1$. In caso di overflow ($\mathtt{OF} = 1$), la situazione $p + q < 0$ si riflette nella condizione (vedi sopra) $(\mathtt{ZF} = 1) \vee (\mathtt{SF} = 0)$, ossia $\mathtt{ZF} + \overline{\mathtt{SF}} = 1$. Detta dunque $f_{\mathtt{NG}} = 1$ la condizione di test per l'istruzione JNG, si ha

$$f_{\mathtt{NG}}(\mathtt{ZF}, \mathtt{SF}, \mathtt{OF}) = (\mathtt{ZF} + \mathtt{SF}) \cdot \overline{\mathtt{OF}} + (\mathtt{ZF} + \overline{\mathtt{SF}}) \cdot \mathtt{OF} = \mathtt{ZF} + \mathtt{SF} \oplus \mathtt{OF} \ . \tag{2}$$

Osserviamo che, anche senza ricordare che la condizione $\mathtt{ZF} = 1$ implica $p + q < 0$ in presenza di overflow, saremmo potuti arrivare comunque al risultato in questo modo: $\overline{\mathtt{SF}} = \overline{\mathtt{SF}} \cdot 1 = \overline{\mathtt{SF}} \cdot (\mathtt{ZF} + 1) = \mathtt{ZF} \cdot \overline{\mathtt{SF}} + \overline{\mathtt{SF}} = \mathtt{ZF} + \overline{\mathtt{SF}}$, etc. Notiamo infine che, a differenza di quanto trovato per la JGE, in questo caso la funzione di test dipende effettivamente da tutti e tre i flag.

Approfondimento. Cerchiamo di capire come mai $f_{\mathtt{GE}}$ non dipende da ZF, mentre $f_{\mathtt{NG}}$ sì. L'implicazione $(\mathtt{ZF} = 1) \Rightarrow (\mathtt{SF} = 0)$ comporta che ZF e SF non possano mai valere 1 contemporaneamente: questo esclude il verificarsi delle configurazioni 110 e 111 corrispondenti alle ultime due righe della tabella di verità di $f_{\mathtt{GE}}$ ed $f_{\mathtt{NG}}$. In tali righe, le funzioni possono quindi assumere valori booleani arbitrari ("don't care").

ZF	SF	OF	$f_{\mathtt{GE}} = \mathtt{ZF} \cdot \overline{\mathtt{OF}} + \overline{\mathtt{SF} \oplus \mathtt{OF}}$	$f_{\mathtt{NG}} = \mathtt{ZF} \cdot \overline{\mathtt{OF}} + \mathtt{SF} \oplus \mathtt{OF}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	×	×
1	1	1	×	×

È ora facile vedere come, sostituendo ai don't care della $f_{\mathtt{GE}}$ rispettivamente i valori 0 (penultima riga) e 1 (ultima riga), la funzione diviene periodica, assumendo la sequenza di valori 1001 sia nella prima metà della tabella (corrispondente a ZF=0), che nella seconda metà (corrispondente a ZF=1). Tali valori dei don't care rendono dunque la funzione indipendente da ZF, come riportato nell'eq. (1). Notiamo che invece non esiste nessuna combinazione di valori dei don't care che renda periodica la tabella di $f_{\mathtt{NG}}$. Peraltro, scegliendo entrambi i don't care della $f_{\mathtt{NG}}$ uguali a 1, si ottiene la semplificazione dell'espressione riportata nell'eq. (2).