Soluzione Compito del 7 Giugno 2010 (DM 270 e 509)

Esercizio 1.

La macchina sequenziale in figura realizza la sottrazione Z = X - Y > = 0 di due parole in rappresentazione naturale X = (…$x_t x_{t-1}$ … $x_1 x_0$ e Y = … $y_t y_{t-1}$ … $y_1 y_0$) fornite bit a bit a partire dai LSB. Progettare la macchina realizzandone l'automa di Mealy e di Moore.

Prima di tutto occorre fare un'analisi su come sottrarre due numeri binari bit a bit perché i numeri naturali rappresentati in base binaria verranno passati alla macchina sequenziale serialmente. L'ipotesi da sfruttare è che X è più grande di Y, quindi il risultato è conseguentemente sempre positivo e naturale. In pratica il meccanismo per sottrarre due numeri bit a bit è sfruttare il prestito successivo ed è lecito farlo in quanto X sarà sempre più grande di Y. Faccio un esempio: prendiamo i numeri X=1000 e Y=0111 → in uscita dovrei avere 0001.

Analizziamo questo esempio più dettagliatamente:

- Al tempo t=0 si ha in ingresso x_0=0 e y_0=1 per ottenere il corretto bit basterà fare la differenza dei due bit tenendo conto del prestito precedente, che inizialmente è 0, e se x_0<=y_0 occorrerà ricordarsi che si è usato un prestito dal bit successivo. In questo caso 10 - 1=1 con prestito 1 (perché x_1<=y_1).
- Al tempo t=1 si ha in ingresso x_1=0 e y_1=1 quindi con lo stesso ragionamento di prima si ottiene in uscita: 10 – 1 – 1 = 0, dove l'ultimo 1 è il prestito allo stato precedente e il prestito è ancora 1 (perché x_2<=y_2).
- Al tempo t=2 si ha in ingresso x_2=0 e y_2=1 quindi questa volta in uscita si ha sempre: 10 – 1 – 1 = 0, dove l'ultimo 1 è il prestito allo stato precedente e il prestito è ancora 1.
- Al tempo t=3 si ha in ingresso x_3=1 e y_3=0 quindi si otterrà: 1 – 0 – 1 = 0 con prestito 0 perché questa volta x_3>y_3.

1000 & 0111→ MACCHINA SEQ. → 0001

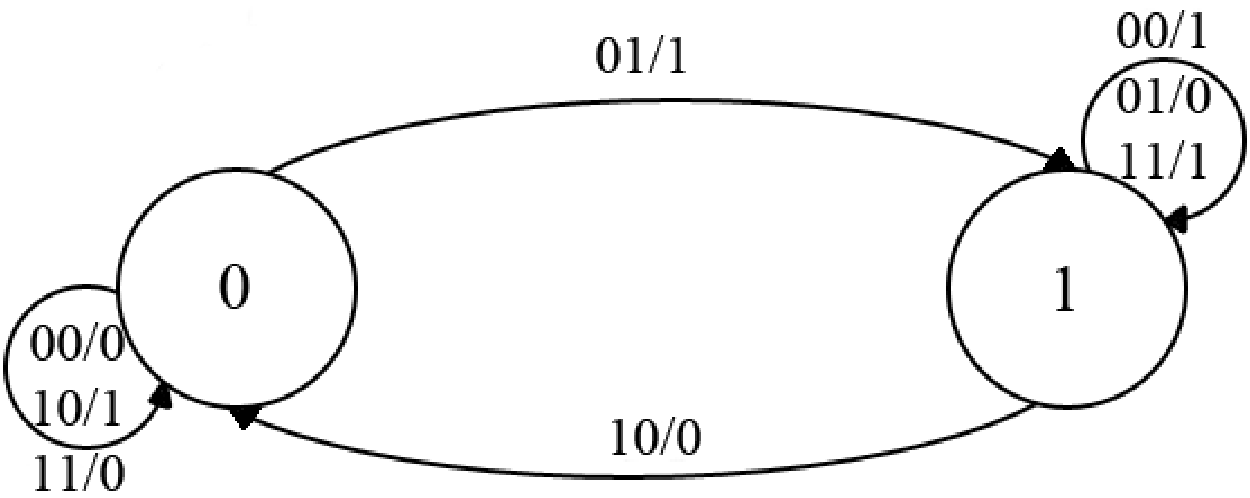
Adesso vado a rappresentare la tabella di stati e uscite, chiamo l'unico stato che mi occorre Q0 che rappresenta il riporto:

x_t	y_t	Q_0	Q_0'	OUT
0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	**1**	**1**
0	1	0	**1**	**1**
0	1	1	**1**	**0**
1	0	0	**0**	**1**
1	0	1	**0**	**0**
1	1	0	**0**	**0**
1	1	1	**1**	**1**

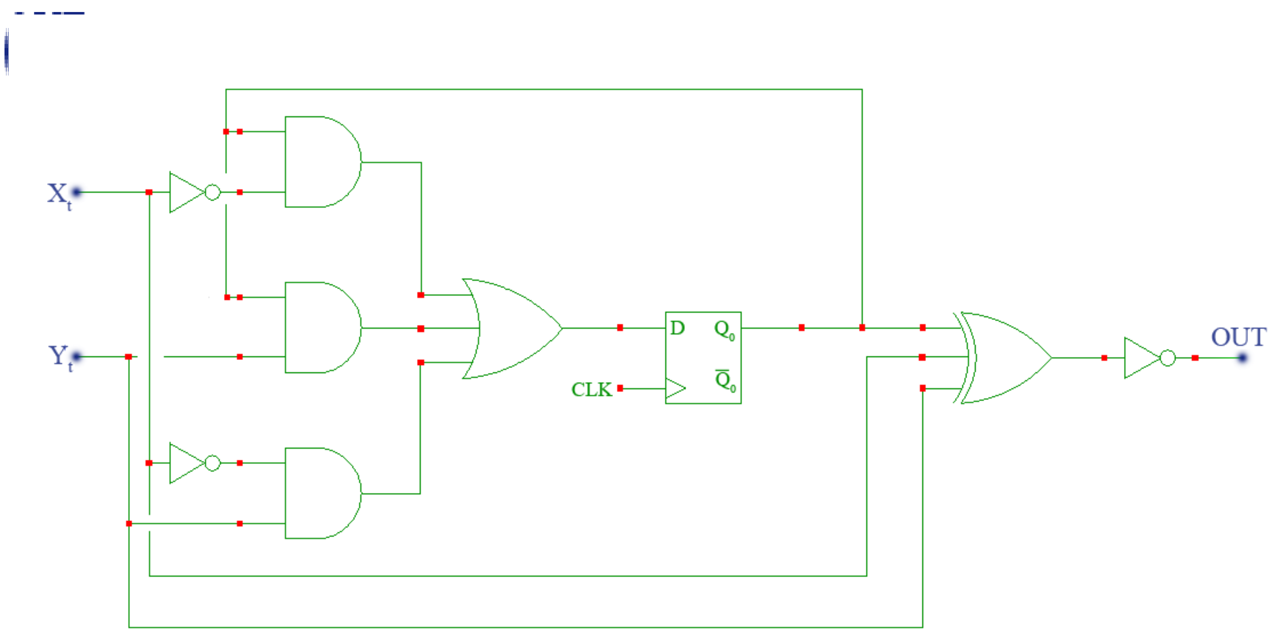
Scrivendo le funzioni Q_0' e OUT in somme di prodotti si ottiene rispettivamente, semplificando:

1. $Q_0' = \overline{x_t}\,\overline{y_t}Q_0 + \overline{x_t}y_t\overline{Q_0} + \overline{x_t}y_tQ_0 + x_ty_tQ_0 = \overline{x_t}Q_0(y_t + \overline{y_t}) + \overline{x_t}y_t\overline{Q_0} + x_ty_tQ_0 = \overline{x_t}(Q_0 + y_t\overline{Q_0}) + x_ty_tQ_0 = \overline{x_t}Q_0 + \overline{x_t}y_t + x_ty_tQ_0 = Q_0(\overline{x_t} + x_ty_t) + \overline{x_t}y_t = \boldsymbol{\overline{x_t}Q_0 + \overline{x_t}y_t + y_tQ_0}$
2. $\mathrm{OUT} = \boldsymbol{x_t\ XOR\ y_t\ XOR\ Q_0}$

E volendo rappresentare l'automa della macchina di Mealy:

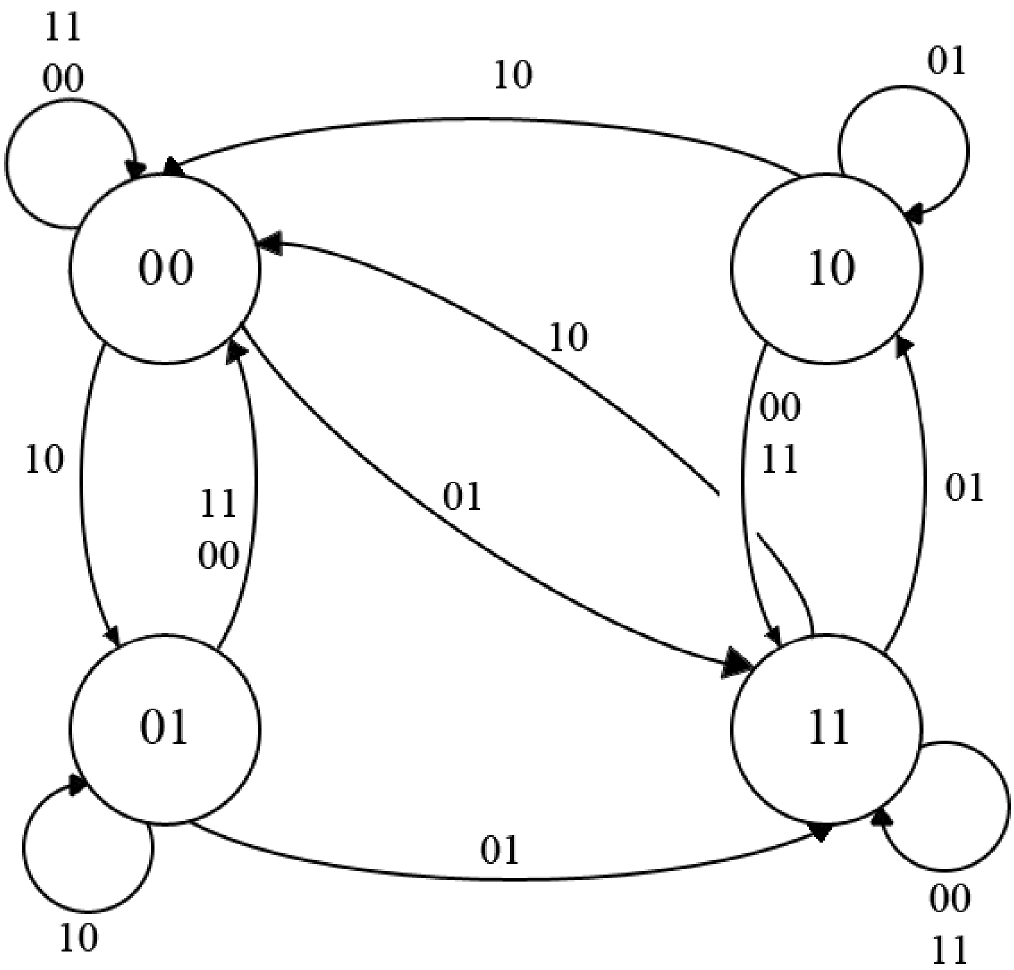


La rete sequenziale, invece è la seguente:



Chiaramente per far funzionare questa macchina occorre che lo stato iniziale Q_0 sia impostato a 0 perché all'avvio della macchina il prestito è nullo.

Brevemente se avessimo voluto progettare la macchina con la struttura di Moore si avrebbe avuto:



In questo caso si avranno due tabelle:

- La prima rappresenta la funzione di transizione di stato;
- La seconda rappresenta la funzione di uscita.

TABELLA FUNZIONE DI TRANSIZIONE DI STATO

X_t	Y_t	Q_0	Q_1	Q_0'	Q_1'
0	0	0	0	**0**	**0**
0	0	0	1	**0**	**0**
0	0	1	0	**1**	**1**
0	0	1	1	**1**	**1**
0	1	0	0	**1**	**1**
0	1	0	1	**1**	**1**
0	1	1	0	**1**	**0**
0	1	1	1	**1**	**0**
1	0	0	0	**0**	**1**
1	0	0	1	**0**	**1**
1	0	1	0	**0**	**0**
1	0	1	1	**0**	**0**
1	1	0	0	**0**	**0**
1	1	0	1	**0**	**0**
1	1	1	0	**1**	**1**
1	1	1	1	**1**	**1**

TABELLA DELLA FUNZIONE DI USCITA

Q_0	Q_1	OUT
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Chiaramente per far funzionare questa macchina, anche in questo caso, occorre che lo stato iniziale Q_0 sia impostato a 0 (mentre Q_1 don't care) perché all'avvio della macchina è necessario che il prestito sia a 0.