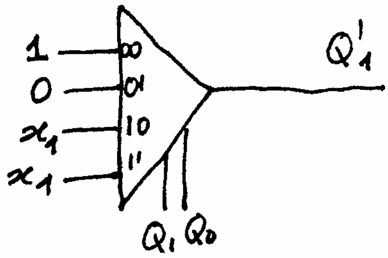
PRIMO PUNTO DELLA SOLUZIONE COMPITINO 3/11/2011

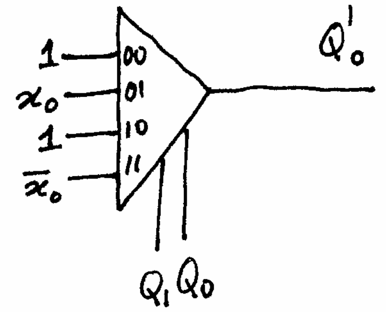
♣

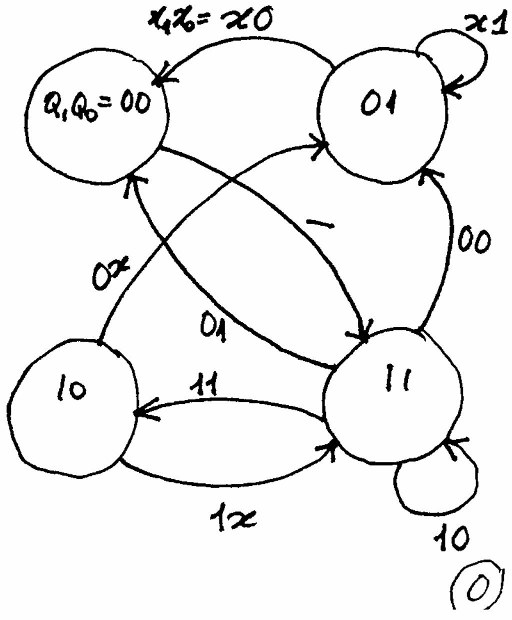
$$\begin{cases} Q_1' = \overline{Q}_1\overline{Q}_0 + x_1 Q_1 \\ Q_0' = \overline{Q}_0 + x_0 \oplus Q_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 = \overline{Q}_1\overline{Q}_0 \\ K_1 = x_1 \oplus Q_1 \\ J_0 = \overline{x}_1 + \overline{Q}_0 \\ K_0 = \overline{x_0 \oplus Q_1} \end{cases}$$

x_1	x_0	Q_1	Q_0	Q_1'	Q_0'
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0





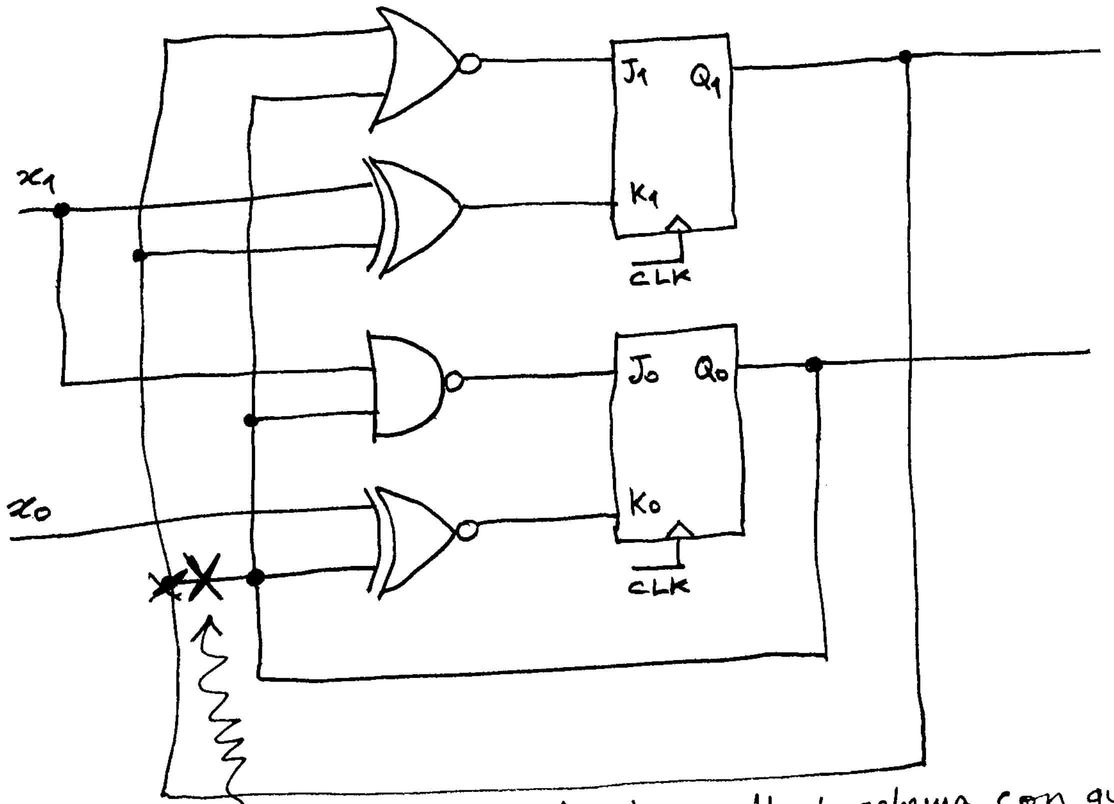


AVVERTENZA

IL PROBLEMA RISOLTO NELLE PAGINE SEGUENTI DIFFERISCE LEGGERMENTE DA QUELLO DEL COMPITO (CAMBIA L'INGRESSO K_0: CIO' COMPORTA L'INVERSIONE DEGLI INGRESSI CAMPIONATI NELLO STATO 01: CFR. L'AUTOMA QUI A FIANCO CON QUELLO DI PAG. 2 .

Soluzioni compitino 3 novembre 2011

ANALISI



N.B. a diff. del compito, ho risolto lo schema con questa variante...

La soluzione del problema del compito è del tutto analoga.

Gli ingressi dei flip-flop sono:

$$J_1 = \overline{Q_1 + Q_0} = \overline{Q}_1\overline{Q}_0$$

$$K_1 = x_1 \oplus Q_1 = x_1\overline{Q}_1 + \overline{x}_1 Q_1 \Rightarrow \overline{K}_1 = x_1 Q_1 + \overline{x}_1\overline{Q}_1$$

$$J_0 = \overline{x_1 Q_0} = \overline{x}_1 + \overline{Q}_0$$

$$K_0 = \overline{x_0 \oplus Q_0} \Rightarrow \overline{K}_0 = x_0 \oplus Q_0 = x_0\overline{Q}_0 + \overline{x}_0 Q_0$$

Dato che fu un JK la funzione caratteristica è $Q' = J\overline{Q} + \overline{K}Q$, abbiamo che la f di transizione di stato è

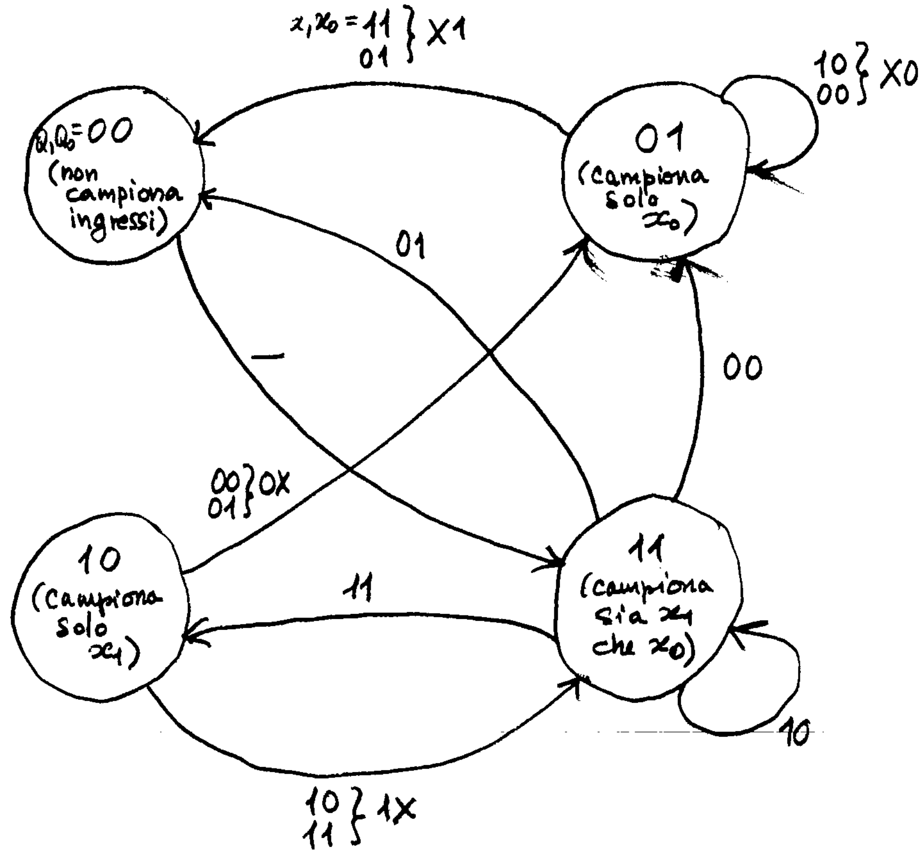
$$\begin{cases} Q'_1 = J_1\overline{Q}_1 + \overline{K}_1 Q_1 = \overline{Q}_1\overline{Q}_0 + x_1 Q_1 \\ Q'_0 = J_0\overline{Q}_0 + \overline{K}_0 Q_0 = \underbrace{(\overline{x}_1 + \overline{Q}_0)\overline{Q}_0}_{\overline{Q}_0} + \overline{x}_0 Q_0 = \overline{x}_0 + \overline{Q}_0 = \overline{x_0 Q_0} \end{cases}$$

$\beta\overline{\alpha} + \alpha = \beta + \alpha$

La tabella di transizione di stato, utile per disegnare l'automa della macchina, è la seguente:

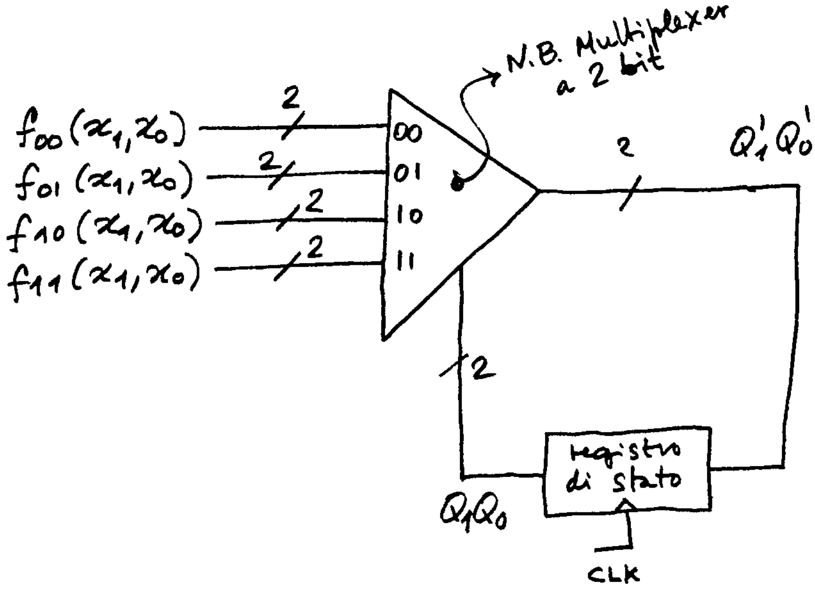
x_1	x_0	Q_1	Q_0	Q'_1	Q'_0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0

Il diagramma degli stati risultante è:



Rappresentazione della macchina con multiplexer e registro di stato.

Lo schema di rappresentazione è il seguente:



con

$$\begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_0' \end{bmatrix} = f_{00}(x_1,x_0)\bar{Q}_1\bar{Q}_0 + f_{01}(x_1,x_0)\bar{Q}_1 Q_0 + f_{10}(x_1,x_0) Q_1\bar{Q}_0 + f_{11}(x_1,x_0) Q_1 Q_0$$

Dall'eq. di transizione di stato ricaviamo subito che $f_{00}(x_1,x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Inoltre, vediamo che f_{01} è funzione del solo x_0, e f_{10} è funzione del solo x_1. Dalla tabella riportiamo i valori delle funzioni da determinare nelle seguenti sotto-tabelle:

x_0	$f_{01}(-,x_0)$	
0	0	1
1	0	0

$\Rightarrow f_{01}(-,x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_0 \end{bmatrix}$

x_1	$f_{10}(x_1,-)$	
0	0	1
1	1	1

$\Rightarrow f_{10}(x_1,-) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$

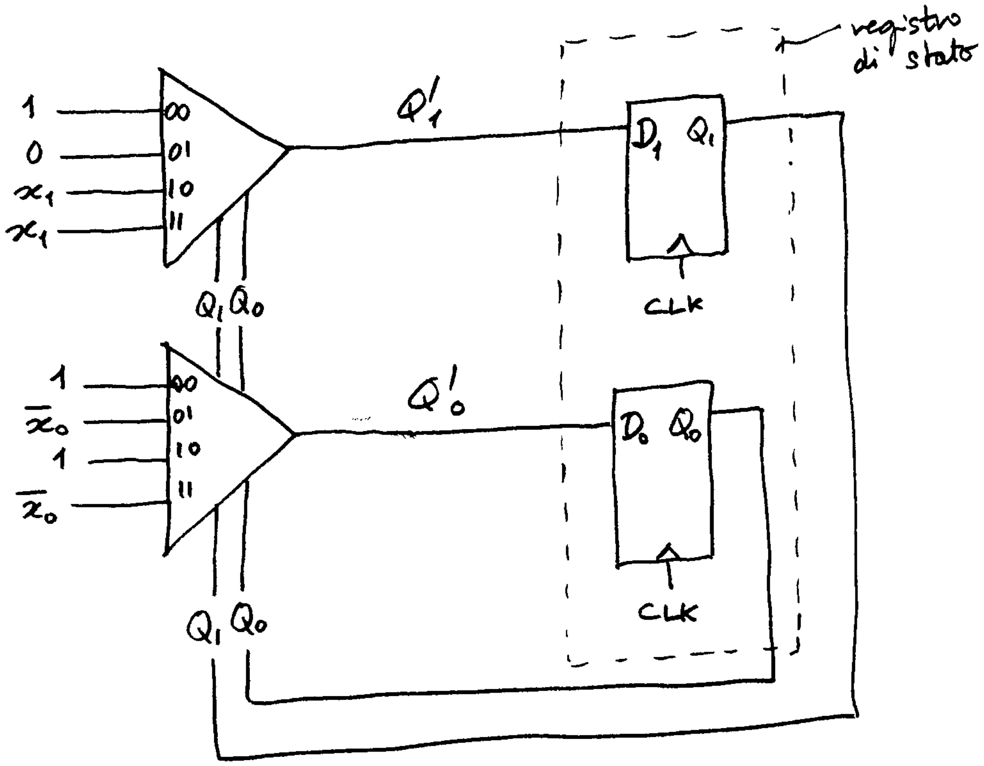
x_1	x_0	$f_{11}(x_1,x_0)$	
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

$\Rightarrow f_{11}(x_1,x_0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_0 \end{bmatrix}$

Dunque, abbiamo

$$\begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{Q}_1 \overline{Q}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{x}_0 \end{bmatrix} \overline{Q}_1 Q_0 + \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} Q_1 \overline{Q}_0 + \begin{bmatrix} x_1 \\ \overline{x}_0 \end{bmatrix} Q_1 Q_0$$

e lo schema corrispondente con i flip-flop di stato è

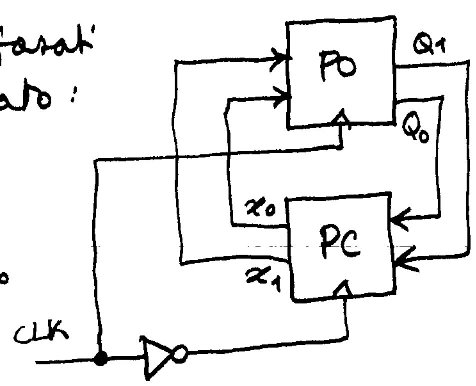


◇ SINTESI

Vogliamo ora accoppiare alla prima macchina (che chiameremo d'ora in poi "PO") una seconda macchina ("PC") che generi i controlli $x_1 x_0$ necessari a produrre la sequenza periodica

$$\dots \underbrace{03211}_{\text{periodo } 5}\, 03211 \dots$$

Useremo lo schema con clock sfasati disegnato a lato:



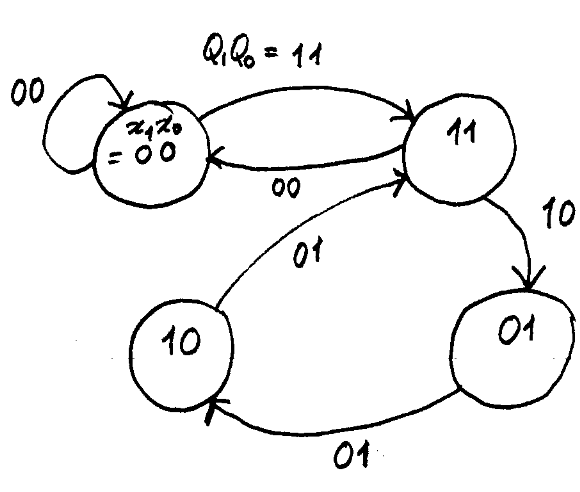
In questo schema, la parte operativa determina il controllo nel semi-periodo di clock successivo.

Servendoci del diagramma degli stati della PO, costruiamo una tabella con lo schema temporale degli ingressi richiesti per la transizione di stato desiderata della PO; ipotizziamo che all'istante iniziale $t = 0$ lo stato della PO sia $(Q_1, Q_0) = (0,0)$ e lo stato della PC sia $(x_1, x_0) = (0,0)$.

t	$Q_1 Q_0$ (stato presente PO)	$X_1 X_0$ (stato presente PC = ingressi richiesti per transizione di stato PO)		conteggio
		(0 0)		0
0↑	0 0			
0↓		X X	scelta dei valori don't care → 0 0	
1↑	1 1			3
1↓		1 1		
2↑	1 0			2
2↓		0 X	→ 0 1	
3↑	0 1			1
3↓		X 0	→ 1 0	
4↑	0 1			1
4↓		X 1	→ 1 1	
5↑	0 0			0
5↓	etc.			

N.B. Poiché la PC va allo stato futuro $X'_1X'_0 = X0$ con $Q_1Q_0X_1X_0 = 010X$ e a $X1 \neq X0$ con $Q_1Q_0X_1X_0 = 01X0$, i don't care in $X_1X_0 = 0X$ e in $X_1X_0 = X0$ non possono essere entrambi 0!

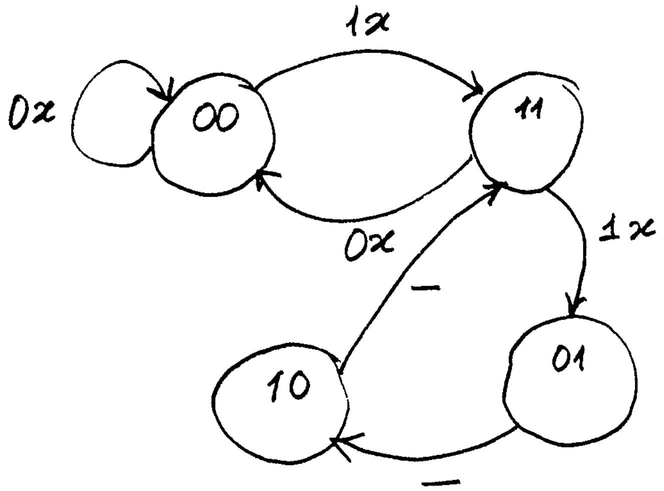
Con la scelta di valori don't care riportata in tabella, il diagramma degli stati della PC è il seguente: →



%

Notiamo altresì che, al fine di produrre la sequenza di periodo 5 data, non è necessario campionare alcun ingresso negli stati $(x_1, x_0) = (1, 0)$ e $(0,1)$. Inoltre, in $(x_1, x_0) = (0,0)$ si può campionare solo uno qualsiasi dei due ingressi (avendosi solo due archi uscenti dallo stato), mentre in $(x_1, x_0) = (1, 1)$ basta campionare x_1.

L'automa modificato appare così:



Troviamo ora
le equazioni di transizione di stato:

Q_1	Q_0	x_1	x_0	x_1'	x_0'
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Come risulta evidente dalla tabella a franco, x_1' e x_0' NON dipendono da Q_0, ma solo da Q_1. Karnaugh:

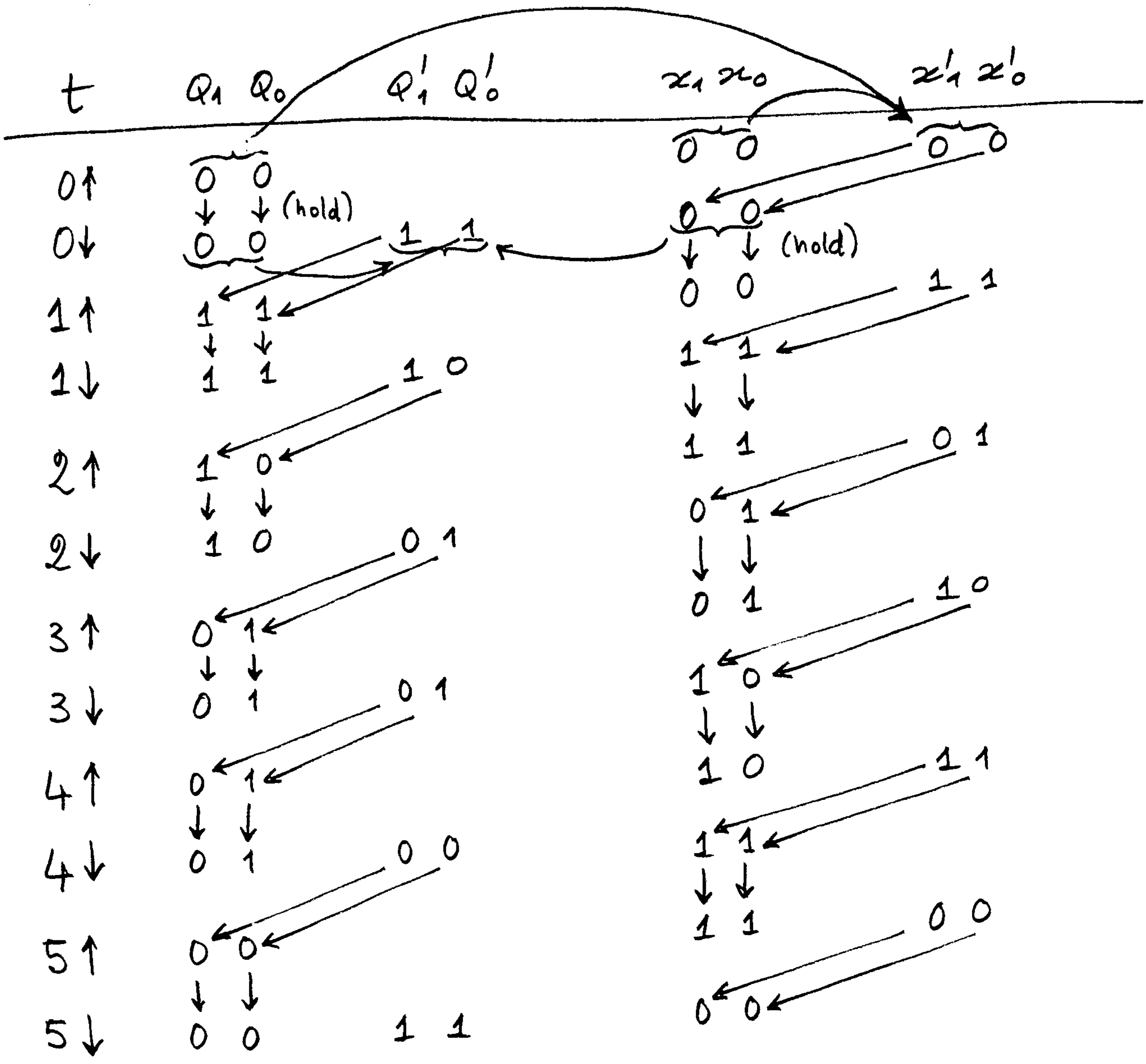
Q_1Q_0 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

$$x_1' = Q_1\bar{x}_0 + x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_1 x_0$$

Q_1Q_0 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0		1
11	1	0	1	1
10	1	0	1	1

$$x_0' = Q_1\bar{x}_0 + x_1\bar{x}_0 + Q_1 x_1$$

♡ DIAGRAMMA TEMPORALE (PO+PC)



etc.

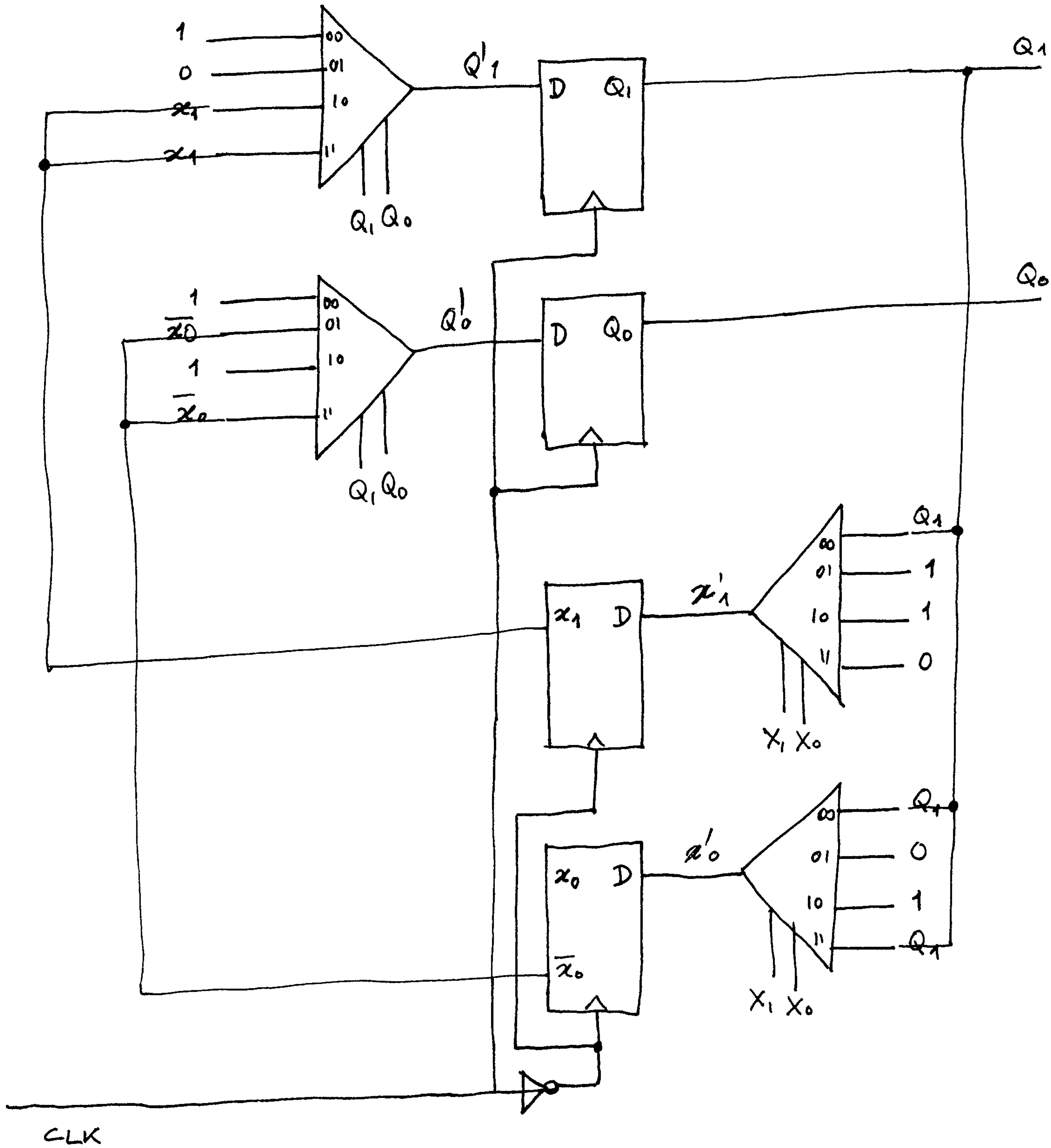
♠ SINTESI DEL CONTROLLO

Procedendo in modo analogo a quanto fatto in precedenza per la PO, si ottengono per la PC le seguenti funzioni di ingresso ai due multiplexer:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} \bar{x}_1 \bar{x}_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1 x_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 \bar{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix} x_1 x_0$$

Possiamo ora procedere al %

Disegno macchina complessiva con MPX



Per la sintesi alternativa, basata su flip-flop JK, partiamo dalle eqq. da realizzare e determiniamo gli ingressi J_1, K_1, J_0, K_0 (funzioni di ingresso e stato presente della PC) necessari ad avere lo stato futuro desiderato. Cominciamo con il bit x_1':

dovranno essere uguali

$$\begin{cases} x_1' = Q_1 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_1 x_0 & \text{(da realizzare)} \\ x_1'^{\,JK} = \underbrace{J_1(Q_1, x_1, x_0)}_{\text{da determinare}} \bar{x}_1 + \underbrace{\overline{K_1(Q_1, x_1, x_0)}}_{\text{da determinare}} x_1 \end{cases}$$

Lavoriamo costruendo ~~la~~ tabella seguente:

x_1'	Q_1 x_1 x_0	$J_1(Q_1,x_1,x_0)$	$J_1\bar{x}_1$	$\overline{K_1(Q_1,x_1,x_0)}$	$\bar{K}_1 x_1$	$x_1'^{\,JK}$
0	0 0 0	J_{000}	J_{000}	$\bar{K}_{000}$	0	J_{000} (=0)
1	0 0 1	J_{001}	J_{001}	$\bar{K}_{001}$	0	J_{001} (=1)
1	0 1 0	J_{010}	0	$\bar{K}_{010}$	$\bar{K}_{010}$	$\bar{K}_{010}$ (=1)
0	0 1 1	J_{011}	0	$\bar{K}_{011}$	$\bar{K}_{011}$	$\bar{K}_{011}$ (=0)
1	1 0 0	J_{100}	J_{100}	$\bar{K}_{100}$	0	J_{100} (=1)
1	1 0 1	J_{101}	J_{101}	$\bar{K}_{101}$	0	J_{101} (=1)
1	1 1 0	J_{110}	0	$\bar{K}_{110}$	$\bar{K}_{110}$	$\bar{K}_{110}$ (=1)
0	1 1 1	J_{111}	0	$\bar{K}_{111}$	$\bar{K}_{111}$	$\bar{K}_{111}$ (=0)

Dall'uguaglianza della prima e dell'ultima colonna risulta:

$$J_1(Q_1,x_1,x_0) = 0 \cdot \bar{Q}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + 1 \cdot \bar{Q}_1 \bar{x}_1 x_0 + X \cdot \bar{Q}_1 x_1 \bar{x}_0 + X \cdot \bar{Q}_1 x_1 x_0 + 1 \cdot Q_1 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + 1 \cdot Q_1 \bar{x}_1 x_0 + \underbrace{X}_{\text{don't care}} \cdot Q_1 x_1 \bar{x}_0 + X \cdot Q_1 x_1 x_0$$

./.

Semplificando con l'algebra booleana o servendosi delle mappe di Karnaugh si arriva a progettare J_1 :

$Q_1 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	0	1	X	X
1	1	1	X	X

$$J_1 = Q_1 + x_0$$

In modo del tutto analogo, otteniamo

$Q_1 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	X	X	1	0
1	X	X	1	0

$$K_1 = x_0$$

Verifichiamo che il calcolo sia corretto sostituendo i J_1 e K_1 trovati in $x_1'^{JK}$, e confrontando con

La x_1' da progettare :

$$x_1'^{JK} = (Q_1 + x_0)\bar{x}_1 + \bar{x}_0 x_1 =$$

$$= Q_1 \bar{x}_1 + x_0 \bar{x}_1 + \bar{x}_0 x_1 =$$

$$= Q_1 \bar{x}_1 (\bar{x}_0 + x_0) + x_0 \bar{x}_1 + \bar{x}_0 x_1 =$$

$$= Q_1 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + \underbrace{Q_1 \bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_1 x_0}_{\bar{x}_1 x_0} + x_1 \bar{x}_0 =$$

$$= (\underbrace{Q_1 \bar{x}_1 + x_1}_{Q_1 + x_1}) \bar{x}_0 + \bar{x}_1 x_0 =$$

$$= Q_1 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_1 x_0 \qquad \underline{\text{ok}}$$

Progettiamo ora in modo analogo gli ingressi J_0 e K_0 per x_0':

$$x_0' = Q_1 \overline{x}_0 + x_1 \overline{x}_0 + Q_1 x_1$$

$$= J_0(Q_1, x_1, x_0)\,\overline{x}_0 + \overline{K_0(Q_1, x_1, x_0)}\, x_0 = x_0'^{\,JK}$$

x_0'	Q_1	x_1	x_0	$J_0 \overline{x}_0$	$\overline{K}_0 x_0$	$x_0'^{\,JK}$
0	0	0	0	j_{000}	0	j_{000} (= 0)
0	0	0	1	0	$\overline{k}_{001}$	$\overline{k}_{001}$ (= 0)
1	0	1	0	j_{010}	0	j_{010} (= 1)
0	0	1	1	0	$\overline{k}_{011}$	$\overline{k}_{011}$ (= 0)
1	1	0	0	j_{100}	0	j_{100} (= 1)
0	1	0	1	0	$\overline{k}_{101}$	$\overline{k}_{101}$ (= 0)
1	1	1	0	j_{110}	0	j_{110} (= 1)
1	1	1	1	0	$\overline{k}_{111}$	$\overline{k}_{111}$ (= 1)

Q_1 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	0	X	X	1
1	1	X	X	1

$$J_0 = Q_1 + x_1$$

Q_1 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	X	1	1	X
1	X	1	0	X

$$K_0 = \overline{x}_1 + \overline{Q}_1 \quad (= \overline{x_1 Q_1})$$

Verifica:

$$x_0'^{\,JK} = (Q_1 + x_1)\,\overline{x}_0 + x_1 Q_1 x_0 =$$

$$= Q_1 \overline{x}_0 + x_1 \overline{x}_0 + Q_1 x_1 x_0 =$$

$$= Q_1 \underbrace{(\overline{x}_0 + x_1 x_0)}_{\overline{x}_0 + x_1} + x_1 \overline{x}_0 =$$

$$= Q_1 \overline{x}_0 + x_1 \overline{x}_0 + Q_1 x_1 \qquad \text{ok}$$

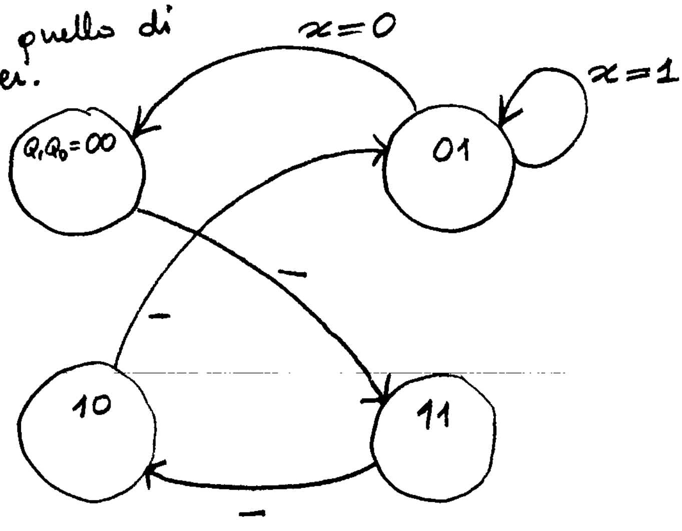
Approfondimento

Poichè il numero di stati complessivi della macchina PO + PC è pari al prodotto del numero di stati delle singole macchine, è chiaro che possiamo arrivare a progettare un "sequencer" (PO + PC) a 5 stati (5 essendo il periodo della sequenza) utilizzando 1 SOLO FLIP-FLOP per la PC. Infatti, in tale caso il numero di stati complessivi per la macchina è

$$\underbrace{4}_{\#\text{stati PO}} \times \underbrace{2}_{\#\text{stati PC}} = 10 \geq 5$$

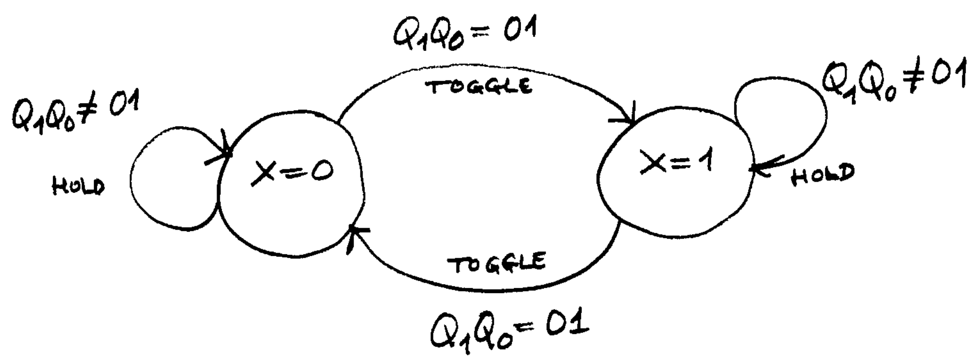
Per progettare il nuovo controllo a singolo flip-flop, modifichiamo l'automa originario della PO riportandone gli stati e gli ingressi strettamente necessari alla produzione della sequenza desiderata (032110 ....). In sostanza, omettiamo tutti i possibili "comportamenti" della PO tranne quello desiderato, che è all'incirca quello di un down counter.

Vediamo che non c'è bisogno di campionare ingressi, salvo che nello stato $Q_1Q_0 = 01$, dove basta campionare un bit, x (vedi fig.)

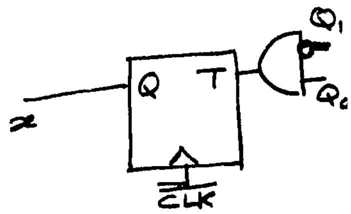


→ inizializzata nello stato $x = 0$

La nostra nuova PC dovrà dunque produrre il giusto x quando la PO si trova nello stato 01:



N.B.: Questo automa si può realizzare facilmente ad es. con un FF T:



La logica combinatoria (necessaria a produrre gli ingressi x_1 e x_0) che pilotano PO facendole generare la sequenza desiderata si può ora facilmente progettare confrontando l'automa modificato (disegnato a pag. 12) con l'automa originale (di pag. 2), o meglio confrontando le espressioni delle funzioni di transizione di stato.

Per l'automa modificato:

x	Q_1	Q_0	$Q_1'^{\,mod}$	$Q_0'^{\,mod}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$\Rightarrow$

$x \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

$$Q_1'^{\,mod} = \overline{Q}_1\overline{Q}_0 + Q_1Q_0 \quad \left(= \overline{Q_1 \oplus Q_0}\right)$$

$x \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

$$Q_0'^{\,mod} = \overline{Q}_0 + x\overline{Q}_1$$

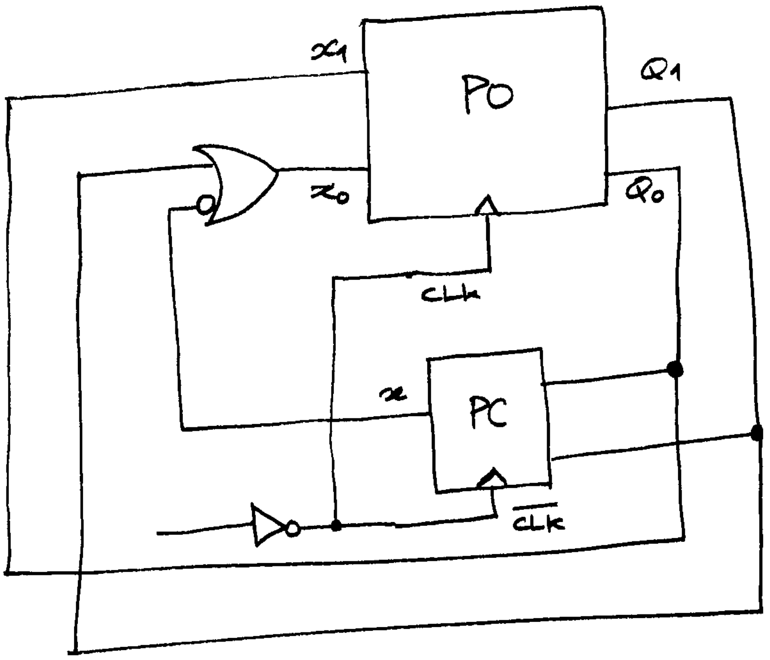
Dunque

$$Q_1'^{\,mod} = \overline{Q}_1\overline{Q}_0 + Q_1Q_0 = \overline{Q}_1\overline{Q}_0 + x_1 Q_1 = Q_1'^{\,orig} \Longleftrightarrow \boxed{x_1 = Q_0}$$

$$Q_0'^{\,mod} = x\overline{Q}_1 + \overline{Q}_0 = \overline{Q}_0 + \overline{x}_0 = Q_0'^{\,orig} \Longleftrightarrow \boxed{x_0 = \overline{x\overline{Q}_1} = \overline{x} + Q_1}$$

%

In definitiva, otteniamo lo stesso comportamento logico di prima con 1 FF in meno se usiamo il seguente schema:



Notiamo che ora gli ingressi x_1 e x_0 sono disponibili all'ingresso della PO (anche se non in forma definitiva, per x_0) già nel semiperiodo positivo del clock.

Verifichiamo il comportamento della macchina simulandone il funzionamento nel tempo:

t	$Q_1 Q_0$	$Q_1' Q_0'$	x	x'	$x_1 = Q_0$	$x_0 = \overline{x} + Q_1$	
0↑	0 0		0	0	0	1	
0↓	0 0	1 1	0				
1↑	1 1		0	0			
1↓	1 1	1 0	0		1	1	
2↑	1 0		0	0			
2↓	1 0	0 1	0		0	1	
3↑	0 1		0	1			
3↓	0 1	0 1	1		0	0	OR
4↑	0 1		1	0			
4↓	0 1	0 0	0		1	1	
5↑	0 0		0	0			
5↓	0 0	1 1	0		1	1	