

Prova in itinere #1 del 12 novembre 2014

Cognome e Nome dello studente: _____

Rimbalzi all'interno di un rettangolo

Dati due interi positivi a e b senza divisori in comune, è sempre possibile ottenere un qualsiasi intero $1 \leq q \leq \max(a, b)$ attraverso somme e sottrazioni ripetute modulo b . Se invece $\text{MCD}(a, b) = c > 1$, allora i q ottenibili sono solo i multipli di c . Un algoritmo che consente di stabilire se è possibile ottenere q da a e b e, in caso affermativo, in quanti passi, è il seguente:

0. if $q > a$ & $q > b$ stop(q-failure)
1. $\alpha \leftarrow a, \beta \leftarrow 0, \rho \leftarrow 0$
2. $\gamma \leftarrow \alpha + \beta$; if $\gamma = q$ stop(success)
3. $\delta \leftarrow \gamma - b$; if $\delta = 0$ stop(c-failure) else if $\delta > 0$ $\{\alpha \leftarrow \delta, \beta \leftarrow 0\}$ else $\{\alpha \leftarrow a, \beta \leftarrow \gamma\}$
4. $\rho \leftarrow \rho + 1$; goto 2

L'algoritmo opera in modo che il punto di coordinate (α, β) si muova all'interno del rettangolo di vertici opposti $(0, 0)$ e (a, b) secondo una traiettoria spezzata che ricorda quella di una palla da biliardo. I punti in cui la palla "rimbalza" sui lati del rettangolo hanno tutti coordinate intere. Se i lati del rettangolo sono primi tra loro, allora saranno toccati tutti i punti con coordinate intere, e quindi anche i punti $(0, q)$, (a, q) , $(q, 0)$ e (q, b) . L'algoritmo si ferma (con successo) quando, dopo ρ iterazioni, uno di questi quattro punti viene raggiunto.

Progettare una macchina sequenziale che realizzi l'algoritmo avendo in ingresso interi positivi a , b e q minori di 32. Le uscite devono ricomprendere **success**, ρ , **q-failure**, e **c-failure**.

- ♡ Disegnare la parte operativa della macchina;
- ◇ Disegnare il diagramma degli stati della parte di controllo;
- ♣ Disegnare lo schema a blocchi delle due parti della macchina e delle loro connessioni, evidenziando clock, ingressi e uscite, segnali di condizione e di controllo;
- ♠ Indicare l'andamento temporale delle variabili in gioco per $a = 7$, $b = 11$, $q = 2$;
- ‡ Realizzare l'hardware della parte di controllo con la tecnica "registro di stato e multiplexer";
- ‡ Semplificare la realizzazione precedente rimuovendo i multiplexer e semplificando la funzione di transizione di stato. Confrontare le due realizzazioni ottenute attribuendo un costo p a ciascuna porta AND e OR e un costo r ad ogni suo ingresso (ad esempio, un OR a 3 ingressi ha un costo $p + 3r$).

Prova in itinere #3 del 12 novembre 2014

Cognome e Nome dello studente: _____

Rimbalzi all'interno di un rettangolo

Dati due interi positivi a e b senza divisori in comune, è sempre possibile ottenere un qualsiasi intero $1 \leq q \leq \max(a, b)$ attraverso somme e sottrazioni ripetute modulo b . Se invece $\text{MCD}(a, b) = c > 1$, allora i q ottenibili sono solo i multipli di c . Un algoritmo che consente di stabilire se è possibile ottenere q da a e b e, in caso affermativo, in quanti passi, è il seguente:

0. if $q > a$ & $q > b$ stop(q-failure)
1. $\alpha \leftarrow a, \beta \leftarrow 0, \rho \leftarrow 0$
2. $\gamma \leftarrow \alpha + \beta$; if $\gamma = q$ stop(success)
3. $\delta \leftarrow \gamma - b$; if $\delta = 0$ stop(c-failure) else if $\delta > 0$ $\{\alpha \leftarrow \delta, \beta \leftarrow 0\}$ else $\{\alpha \leftarrow a, \beta \leftarrow \gamma\}$
4. $\rho \leftarrow \rho + 1$; goto 2

L'algoritmo opera in modo che il punto di coordinate (α, β) si muova all'interno del rettangolo di vertici opposti $(0, 0)$ e (a, b) secondo una traiettoria spezzata che ricorda quella di una palla da biliardo. I punti in cui la palla "rimbalza" sui lati del rettangolo hanno tutti coordinate intere. Se i lati del rettangolo sono primi tra loro, allora saranno toccati tutti i punti con coordinate intere, e quindi anche i punti $(0, q)$, (a, q) , $(q, 0)$ e (q, b) . L'algoritmo si ferma (con successo) quando, dopo ρ iterazioni, uno di questi quattro punti viene raggiunto.

Progettare una macchina sequenziale che realizzi l'algoritmo avendo in ingresso interi positivi a , b e q minori di 32. Le uscite devono ricomprendere **success**, ρ , **q-failure**, e **c-failure**.

- ♡ Disegnare la parte operativa della macchina;
- ◇ Disegnare il diagramma degli stati della parte di controllo;
- ♣ Disegnare lo schema a blocchi delle due parti della macchina e delle loro connessioni, evidenziando clock, ingressi e uscite, segnali di condizione e di controllo;
- ♠ Indicare l'andamento temporale delle variabili in gioco per $a = 11$, $b = 7$, $q = 9$;
- ‡ Realizzare l'hardware della parte di controllo con la tecnica "registro di stato e multiplexer";
- ‡ Semplificare la realizzazione precedente rimuovendo i multiplexer e semplificando la funzione di transizione di stato. Confrontare le due realizzazioni ottenute attribuendo un costo p a ciascuna porta AND e OR e un costo r ad ogni suo ingresso (ad esempio, un OR a 3 ingressi ha un costo $p + 3r$).