

## Compito del 22 giugno 2005

## ★ SOLUZIONI ★

1/a

## Indovinello

*Nel paesino di Bianconero, i manigoldi dicono sempre il falso, e i cavalieri sempre il vero. Di Bianconero sono A e B. “Siamo entrambi manigoldi”, dice il primo. Chi è chi?*

Risolvere l'indovinello adoperando le proprietà dell'algebra di Boole e/o le tabelle di verità. Associare il valore 1 alle proposizioni vere, e 0 a quelle false.

## soluzione

Indichiamo con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le variabili booleane associate rispettivamente ai valori di verità ( $1 \mapsto$  vero,  $0 \mapsto$  falso) delle proposizioni “A è un cavaliere”, “B è un cavaliere”, “A e B sono entrambi manigoldi”. L'ultima frase è quella pronunciata da A: il suo valore di verità dipende dai valori di verità delle altre due frasi, e si può scrivere che  $\gamma = \Gamma(\alpha, \beta)$ , con  $\Gamma(\cdot)$  funzione booleana di due variabili. Nel nostro caso, si ha

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \bar{\alpha}\bar{\beta} . \quad (1)$$

Data una qualsiasi proposizione P, essa è logicamente compatibile con la natura di chi la pronuncia (cavaliere o manigoldo), quando essa risulta vera se a pronunciarla è un cavaliere, e/o (or inclusivo) risulta falsa se a pronunciarla è un manigoldo. Dunque la particolare proposizione del problema è compatibile con la natura di A se  $\alpha = \Gamma(\alpha, \beta)$  è verificata per qualche coppia  $(\alpha, \beta)$ . In altre parole, gli eventuali valori delle variabili  $\alpha$  e  $\beta$  per cui (l'operatore NXOR verifica l'uguaglianza di due variabili)

$$\overline{\alpha \oplus \Gamma(\alpha, \beta)} = \alpha \Gamma(\alpha, \beta) + \bar{\alpha} \overline{\Gamma(\alpha, \beta)} = 1 \quad (2)$$

forniscono la soluzione del problema dato. Si noti che la soluzione non è in generale unica, potendo accadere che le espressioni  $\alpha \Gamma(\alpha, \beta)$  e  $\bar{\alpha} \overline{\Gamma(\alpha, \beta)}$  valgano 1 simultaneamente o separatamente per diverse coppie  $(\alpha, \beta)$ . Può anche accadere che nessuna coppia  $(\alpha, \beta)$  soddisfi l'equazione 2, nel qual caso il problema non ammette soluzione. Sostituendo l'eq. 1 nella 2 si ricava immediatamente che nel nostro caso dev'essere  $\bar{\alpha}\bar{\beta} = 1$ , ossia che la soluzione è unica, e si ha che A è un manigoldo ( $\alpha = 0$ ) e B è un cavaliere ( $\beta = 1$ ).

1/b

## Indovinello

*Nel paesino di Bianconero, i manigoldi dicono sempre il falso, e i cavalieri sempre il vero. Di Bianconero sono A e B. “Uno di noi almeno è un manigoldo”, dice il primo. Chi è chi?*

## soluzione

Lavoriamo stavolta con le tabelle di verità, costruendo valore per valore prima la funzione  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , e poi la *funzione di compatibilità*  $\Theta(\alpha, \beta) = \alpha \Gamma(\alpha, \beta) + \bar{\alpha} \overline{\Gamma(\alpha, \beta)}$ : le eventuali righe in cui tale funzione assume valore 1 forniscono le configurazioni soluzione del problema. Quando la funzione di compatibilità è espressa da un solo mintermine, allora la soluzione è unica.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma = \Gamma(\alpha, \beta)$	$\alpha \gamma$	$\bar{\alpha} \bar{\gamma}$	$\Theta(\alpha, \beta)$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
<b>1</b>	<b>0</b>	1	1	0	<b>1</b>
1	1	0	0	0	0

È quanto accade in questo caso. La soluzione è che A è un cavaliere ( $\alpha = 1$ ) e B è un manigoldo ( $\beta = 0$ ).

**Approfondimento.** *Supponiamo che A pronunci la frase  $P_A = \text{“Se B è un manigoldo, io sono un cavaliere”}$ , e B pronunci la frase  $P_B = \text{“A ed io siamo diversi”}$ : cosa si può concludere?* Stavolta la sola affermazione di A non permette di risolvere in modo univoco il problema dell'identità di A e B. Infatti, la funzione di compatibilità  $\Theta_A(\alpha, \beta) = \alpha \Gamma_A(\alpha, \beta) + \bar{\alpha} \overline{\Gamma_A(\alpha, \beta)}$ , con  $\Gamma_A(\alpha, \beta) = \bar{\beta} \rightarrow \alpha = \beta + \alpha = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}$ , vale  $\Theta_A(\alpha, \beta) = \bar{\beta} + \alpha = \beta \rightarrow \alpha$ : da essa si ricava soltanto che non può accadere che A sia manigoldo ( $\alpha = 0$ ) e B cavaliere ( $\beta = 1$ ). (L'operatore  $\rightarrow$ , definito da  $p \rightarrow q = \bar{p} + q$ , prende il nome di “implicazione materiale” in logica proposizionale: esso stabilisce che la conclusione  $q$  segue sempre dalla premessa  $p$ , salvo nel caso in cui la premessa sia vera ( $p = 1$ ) e la conclusione falsa ( $q = 0$ ) — ad es., “se l'asino vola allora  $1 + 1 = 3$ ” è vera, mentre “se il merlo vola allora  $1 + 1 = 3$ ” è falsa.) La frase di B consente peraltro di rimuovere l'incertezza sull'identità di A e B. Infatti, è  $\Gamma_B(\alpha, \beta) = \alpha \oplus \beta$ , da cui  $\Theta_B(\alpha, \beta) = \bar{\alpha}$ . Ora, dovendosi avere congiuntamente (prodotto logico)  $\Theta_A = 1$  e  $\Theta_B = 1$ , si può costruire la funzione di compatibilità totale del problema  $\Theta(\alpha, \beta) = \Theta_A(\alpha, \beta) \Theta_B(\alpha, \beta) = \bar{\alpha} \bar{\beta}$ , che assume valore 1 solo se entrambi A e B sono manigoldi. Con le tabelle di verità:

$\alpha$	$\beta$	$\Gamma_A(\alpha, \beta)$	$\Theta_A(\alpha, \beta)$	$\Gamma_B(\alpha, \beta)$	$\Theta_B(\alpha, \beta)$	$\Theta(\alpha, \beta)$
<b>0</b>	<b>0</b>	0	1	0	1	<b>1</b>
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0