Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Calcolatori Elettronici I — a.a. 2004–2005

Compito del 22 giugno 2005

⋆ SOLUZIONI ⋆

1/a Indovinello

> *Nel paesino di Bianconero, i* manigoldi *dicono sempre il falso, e i* cavalieri *sempre il vero. Di Bianconero sono A e B. "Siamo entrambi manigoldi", dice il primo. Chi è chi?*

Risolvere l'indovinello adoperando le proprietà dell'algebra di Boole e/o le tabelle di verità. Associare il valore 1 alle proposizioni vere, e 0 a quelle false.

soluzione

Indichiamo con α, β e γ le variabili booleane associate rispettivamente ai valori di verità ($1 \mapsto$ vero, $0 \mapsto$ falso) delle proposizioni "A è un cavaliere", "B è un cavaliere", "A e B sono entrambi manigoldi". L'ultima frase è quella pronunciata da A: il suo valore di verità dipende dai valori di verità delle altre due frasi, e si può scrivere che $\gamma = \Gamma(\alpha, \beta)$, con $\Gamma(\cdot)$ funzione booleana di due variabili. Nel nostro caso, si ha

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \overline{\alpha}\overline{\beta} \quad . \tag{1}$$

Data una qualsiasi proposizione P, essa è logicamente compatibile con la natura di chi la pronuncia (cavaliere o manigoldo), quando essa risulta vera se a pronunciarla è un cavaliere, e/o (or inclusivo) risulta falsa se a pronunciarla è un manigoldo. Dunque la particolare proposizione del problema è compatibile con la natura di A se $\alpha = \Gamma(\alpha, \beta)$ è verificata per qualche coppia (α, β). In altre parole, gli eventuali valori delle variabili α e β per cui (l'operatore NXOR verifica l'uguaglianza di due variabili)

$$\overline{\alpha \oplus \Gamma(\alpha, \beta)} = \alpha\, \Gamma(\alpha, \beta) + \overline{\alpha}\, \overline{\Gamma(\alpha, \beta)} = 1 \tag{2}$$

forniscono la soluzione del problema dato. Si noti che la soluzione non è in generale unica, potendo accadere che le espressioni $\alpha\, \Gamma(\alpha, \beta)$ e $\overline{\alpha}\, \overline{\Gamma(\alpha, \beta)}$ valgano 1 simultaneamente o separatamente per diverse coppie (α, β). Può anche accadere che nessuna coppia (α, β) soddisfi l'equazione 2, nel qual caso il problema non ammette soluzione. Sostituendo l'eq. 1 nella 2 si ricava immediatamente che nel nostro caso dev'essere $\overline{\alpha}\beta = 1$, ossia che la soluzione è unica, e si ha che A è un manigoldo ($\alpha = 0$) e B è un cavaliere ($\beta = 1$).

1/b **Indovinello**

Nel paesino di Bianconero, i manigoldi *dicono sempre il falso, e i* cavalieri *sempre il vero. Di Bianconero sono A e B. "Uno di noi almeno è un manigoldo", dice il primo. Chi è chi?*

soluzione

Lavoriamo stavolta con le tabelle di verità, costruendo valore per valore prima la funzione $\Gamma(\alpha, \beta)$, e poi la *funzione di compatibilità* $\Theta(\alpha, \beta) = \alpha\,\Gamma(\alpha, \beta) + \overline{\alpha}\,\overline{\Gamma(\alpha, \beta)}$: le eventuali righe in cui tale funzione assume valore 1 forniscono le configurazioni soluzione del problema. Quando la funzione di compatibilità è espressa da un solo mintermine, allora la soluzione è unica.

α	β	$\gamma = \Gamma(\alpha, \beta)$	$\alpha\,\gamma$	$\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}$	$\Theta(\alpha, \beta)$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	**0**	1	1	0	**1**
1	1	0	0	0	0

È quanto accade in questo caso. La soluzione è che A è un cavaliere ($\alpha = 1$) e B è un manigoldo ($\beta = 0$).

Approfondimento. *Supponiamo che A pronunci la frase* $\mathrm{P_A} =$*"Se B è un manigoldo, io sono un cavaliere", e B pronunci la frase* $\mathrm{P_B} =$*"A ed io siamo diversi": cosa si può concludere?* Stavolta la sola affermazione di A non permette di risolvere in modo univoco il problema dell'identità di A e B. Infatti, la funzione di compatibilità $\Theta_\mathrm{A}(\alpha, \beta) = \alpha\,\Gamma_\mathrm{A}(\alpha, \beta) + \overline{\alpha}\,\overline{\Gamma_\mathrm{A}(\alpha, \beta)}$, con $\Gamma_\mathrm{A}(\alpha, \beta) = \overline{\beta} \to \alpha = \beta + \alpha = \overline{\overline{\beta} \cdot \overline{\alpha}}$, vale $\Theta_\mathrm{A}(\alpha, \beta) = \overline{\beta} + \alpha = \beta \to \alpha$: da essa si ricava soltanto che non può accadere che A sia manigoldo ($\alpha = 0$) e B cavaliere ($\beta = 1$). (L'operatore $\to$, definito da $p \to q = \overline{p} + q$, prende il nome di "implicazione materiale" in logica proposizionale: esso stabilisce che la conclusione q segue sempre dalla premessa p, salvo nel caso in cui la premessa sia vera ($p = 1$) e la conclusione falsa ($q = 0$) — ad es., "se l'asino vola allora $1 + 1 = 3$" è vera, mentre "se il merlo vola allora $1 + 1 = 3$" è falsa.) La frase di B consente peraltro di rimuovere l'incertezza sull'identità di A e B. Infatti, è $\Gamma_\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \alpha \oplus \beta$, da cui $\Theta_\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \overline{\alpha}$. Ora, dovendosi avere congiuntamente (prodotto logico) $\Theta_\mathrm{A} = 1$ e $\Theta_\mathrm{B} = 1$, si può costruire la funzione di compatibilità totale del problema $\Theta(\alpha, \beta) = \Theta_\mathrm{A}(\alpha, \beta)\,\Theta_\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, che assume valore 1 solo se entrambi A e B sono manigoldi. Con le tabelle di verità:

α	β	$\Gamma_\mathrm{A}(\alpha, \beta)$	$\Theta_\mathrm{A}(\alpha, \beta)$	$\Gamma_\mathrm{B}(\alpha, \beta)$	$\Theta_\mathrm{B}(\alpha, \beta)$	$\Theta(\alpha, \beta)$
0	**0**	0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0